1. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

1.1 Capital financiero: capitalización y descuento.

Un capital financiero siempre se denota mediante (C, t) siendo C la cantidad montante y t el momento de su disponibilidad/vencimiento. Por ejemplo, un banco nos presta 1000 euros hoy y otros 5000 euros en un año. Los dos capitales se denotan: (1000, 0) y (5000, 1).
Lo habitual es representar toda operación en un eje de tiempo.

Prestamista: el que entrega el primer capital (prestación)
Prestatario: quien devuelve el capital al prestamista (mediante contraprestaciones)

1.2 Ley financiera

Traslada el valor de un capital en el tiempo según unos intereses. Su fórmula es:

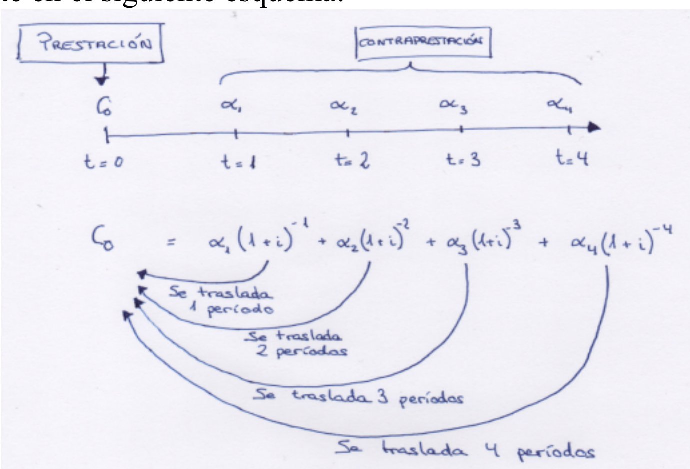
$$C_0 = \alpha_1(1+i)^{-1} + \alpha_2(1+i)^{-2} + ... + \alpha_n(1+i)^{-n}$$

Siendo
C_0 : Prestación
α_n : Contraprestación en el momento n
i : Interés aplicado a la contraprestación

En la fórmula de la ley financiera la prestación se entrega en el instante $t = 0$ y cada contraprestación tiene lugar en los instantes $t = 1$, $t = 2$ ... hasta $t = n$.
Si nos fijamos en el exponente vemos que cada uno de los pagos de la contraprestación se denota por:

$$\alpha_t(1+i)^{-t}$$

y que el exponente descuenta los intereses t veces, trasladando el pago correspondiente de la contraprestación al momento $t = 0$, donde equivaldría a devolver el dinero de forma inmediata y sin intereses.
Por eso esta ecuación calcula los capitales financieramente equivalentes a otros en un momento dado.
Esto se ve claramente en el siguiente esquema:



Ejemplo 1.2.1
El banco nos concede un préstamo de 1000 € a devolver en 3 anualidades con un interés nominal anual del 5%. Las anualidades son de 367,21 € en total cada una. Planteamos la ecuación de equivalencia financiera al inicio del préstamo (t=0):

$$1000 = 367{,}21(1{,}05)^{-1} + 367{,}21(1{,}05)^{-2} + 367{,}21(1{,}05)^{-3}$$

$$1000 = 349{,}72 + 333{,}07 + 317{,}21$$

1.3 Leyes simple y compuesta

Permiten hallar un capital equivalente al final de n períodos a un interés i para una prestación C_0. En la ley simple, los intereses no se acumulan; en la compuesta sí. Se formulan de la siguiente manera:
- Ley simple

$$C_n = C_0(1 + ni)$$

- Ley compuesta

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Por lo general se utilizará siempre la ley compuesta por ser la más habitual en las operaciones de banca real.

Ejemplo 1.3.1
Depositamos a plazo fijo 60.000 € en un banco que nos proporciona un 5% de interés nominal anual por 3 años. Calcular el montante final en el caso del interés simple y compuesto.
- Ley simple

$$C_3 = 60000(1 + 3 * 0{,}05)$$

$$C_3 = 69000 \text{ €}$$

- Ley compuesta

$$C_3 = 60000(1{,}05)^3$$

$$C_3 = 69457{,}5 \text{ €}$$

Como en la ley compuesta los intereses generan nuevos intereses, el montante final es mayor.

1.4 Capitalización fraccionada y tipos de interés

Si los pagos de una contraprestación o la capitalización de una cantidad determinada se realiza en periodos menores a un año, el numero de períodos será mayor atendiendo a la frecuencia de los pagos. Por ejemplo, si pagamos una cuota trimestral durante 4 años, el numero de periodos es:

$$t = n * m$$

Siendo:
t = numero total de períodos

n = numero de años de duración de la operación
m = frecuencia de capitalización

La frecuencia de capitalización se determina mediante la siguiente proporción
m: 12, capitalización mensual, por haber 12 meses en un año
m: 6 capitalización bimensual, por haber 6 períodos bimensuales en un año
m: 4 capitalización trimestral, por haber 4 trimestres en un año
m: 3 capitalización cuatrimestral, por haber 3 cuatrimestres en un año
m: 2 capitalización semestral, por haber 2 semestres en un año
m: 1 capitalización anual, es la situación en la que podemos prescindir de m

El tipo de interés que utilizábamos hasta ahora no se puede aplicar directamente, pues era un tipo nominal anual (que se capitaliza una vez al año). Como se denomina por J_m, es fácil entender que hasta este momento utilizábamos un interés J_1. Si este interés se hubiese de aplicar en pagos semestrales, se denotaría como J_2 y así sucesivamente.
El tipo m-ésimo (i_m) es el resultante de dividir el interés J_m entre la frecuencia m y su resultado es el interés que se aplicará en los pagos.

$$i_m = J_m/m$$

Ejemplo 1.4.1
Un banco nos concede un préstamo de 1000 € a devolver en pagos trimestrales con un interés anual del 12 %. Calcular el interés que se paga en cada mes:

$$m = 4$$
$$J_4 = 12\%$$
$$i_4 = J_4/4 = 12/4 = 3\% = 0{,}03$$

Cada mes se aplicará un 3 % de interés en el pago.

Además en las leyes simple y compuesta, el numero de períodos n ha de ser sustituido por $m * n$.
Como a veces puede resultar engorroso trabajar con los intereses fraccionados, se puede calcular su equivalente anual. Es decir, el tipo anual equivalente (denotado simplemente por la letra i) al interés fraccionado m-ésimo. Su valor es cercano al tipo nominal, pero no es igual. Se calcula:

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

Por lo general se nos dará el J_m correspondiente.

2. PRÉSTAMOS

2.1 Método de amortización de cuota constante

En este método de amortización, se devuelve al prestamista una parte constante de capital (denotada A_t) a la que se le suma un interés correspondiente a ese período (I_t). La cuota final (a la que llamaremos α_t) en cada período va variando pues el interés en los primeros pagos es mayor que en los finales.

Veamos la tabla del préstamo. Las columnas M_t y C_t reflejan la cantidad correspondiente al capital que se ha amortizado hasta ese período y la cantidad que aún falta por amortizar.

Ejemplo 2.1.1
Un banco nos concede un préstamo de 10.000 € a devolver en 3 años mediante pagos trimestrales y sujeto a un interés del 12 %. Elaborar la tabla del préstamo.

$C_0 = 10000$
$t = m * n = 4 * 3 = 12$ (numero total de periodos)
$J_4 = 12\%$
$i_4 = 12/4 = 3\% = 0{,}03$ (interés a pagar por trimestre)

1º) Calculamos la cantidad de capital A_t que amortizamos en cada período:

$$A_t = C_0/t = 10000/12 = 833{,}33 \text{ €}$$

2º) Planteamos la tabla rellenando tan solo los datos conocidos hasta el momento de la siguiente forma:

En el instante $t = 0$ solo se recibe la prestación pero no se entrega ninguna contraprestación. Del instante $t = 1$ en adelante sabemos que se pagarán 833,33 € como A_t y que M_t aumentará según se produzcan los pagos, descendiendo progresivamente también y de forma proporcional los valores de C_t. Al instante $t = 12$ el capital amortizado deberá ser 10.000 y el pendiente será 0. Por lo tanto podemos rellenar los siguientes campos.

t	A_t	I_t	α_t	M_t	C_t
0	-	-	-	-	10.000 €
1	833,33 €			833,33 €	9166,67 €
2	833,33 €			1666,67 €	8333,33 €
3	833,33 €			2500 €	7500 €
...	...	...	...	...	...
12	833,33 €			10.000 €	0 €

3º) Por ultimo calculamos el interés correspondiente a cada período sobre el capital pendiente de amortizar en el periodo anterior y lo sumamos a A_t para obtener el total a pagar en ese instante (α_t).

$$I_t = i_m * C_{t-1}$$

Según esta fórmula se ven claramente cómo se calculan los intereses a pagar:

$$I_1 = i_m * C_0 = 0{,}03 * 10000 = 300 \text{ €}$$
$$I_2 = i_m * C_1 = 0{,}03 * 9166{,}67 = 275 \text{ €}$$
$$\ldots$$

y la cuota final α_t será:

$$\alpha_1 = A_1 + I_1 = 833{,}33 + 300 = 1133{,}33 \text{ €}$$
$$\alpha_2 = A_2 + I_2 = 833{,}33 + 275 = 1108{,}33 \text{ €}$$

2.2 Sistema Francés

Este es el sistema más habitual en la realidad. En este caso, la cuota total a pagar α_t permanece constante, y las partes de capital y de intereses van variando su proporción a lo largo de la vida del préstamo. Por eso a este método se le puede llamar también «Método de amortización de cuota ***total*** constante» pero no debe ser confundido con el anterior.

Por ser α_t constante, el sistema francés difiere en los cálculos de la cuota. El orden de creación de la tabla es también distinto. Retomamos el ejemplo anterior pero en esta vez se le aplica el sistema francés.

Ejemplo 2.2.1
Un banco nos concede un préstamo de 10.000 € a devolver en 3 años mediante pagos trimestrales y sujeto a un interés del 12 %. Elaborar la tabla del préstamo.

$C_0 = 10000$
$t = m * n = 4 * 3 = 12$ (numero total de periodos)
$J_4 = 12\%$
$i_4 = 12/4 = 3\% = 0{,}03$ (interés a pagar por trimestre)

1º) Calculamos el valor de α_t mediante la siguiente fórmula:

$$\alpha_t = \frac{C_0}{a_{n \neg i}}$$

Siendo $a_{n \neg i}$:

$$a_{n \neg i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-t}$$

o de forma más breve:

$$a_{n \neg i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Pero como en cualquier caso el tipo de interés es un tipo i_m fraccionado, no podemos olvidar que n será sustituido por $m * n$. De modo que, para nuestro ejemplo las formulas adecuadas son:

$$\alpha_t = \frac{C_0}{a_{(m*n) \neg i_m}}$$

$$a_{(m*n) \neg i_m} = (1+i_m)^{-1} + (1+i_m)^{-2} + ... + (1+i_m)^{-t}$$

$$a_{(m*n) \neg i_m} = \frac{1-(1+i_m)^{-(m*n)}}{i_m}$$

Por lo tanto:

$$a_{12 \neg 0{,}03} = \frac{1-(1{,}03)^{-12}}{0{,}03} = 9{,}954$$

$$\alpha_t = 10000/9{,}954 = 1004{,}62 \text{ €}$$

2º) Planteamos la tabla rellenando tan solo los datos conocidos hasta el momento de la siguiente forma:

En el instante $t = 0$ solo se recibe la prestación pero no se entrega ninguna contraprestación. Del instante $t = 1$ en adelante sabemos que se pagarán 1004,62 € como α_t. Dado que el calculo de I_1 es muy sencillo, sabremos que A_1 será la diferencia entre $\alpha_1 - I_1$. Las celdas M_1 y C_1 se podrán ya rellenar y, de ahí en adelante solo queda realizar los cálculos en cadena pertinentes.

Recordemos que $I_t = i_m * C_{t-1}$

t	A_t	I_t	α_t	M_t	C_t
	-	-	-	-	10.000 €
1	704,62 €	300 €	1004,62 €	704,62 €	9295,38 €
2	725,76 €	278,86 €	1004,62 €	1430,38 €	8569,62 €
3	747,53 €	257,09 €	1004,62 €	2177,91 €	7822,09 €
...	...	...	...	...	...
12	...	...	1004,62 €	10.000 €	0 €

2.3 Cancelación anticipada

Si en un instante determinado de un préstamo queremos cancelarlo, es decir pagar todo lo pendiente por amortizar (el valor de la columna C_t), pero no disponemos de la tabla del préstamo, podemos igualmente calcularlo de forma sencilla. Podemos calcular cuanto falta por amortizar en el instante x de dos maneras: de forma retrospectiva (calculando lo ya amortizado y restándoselo al total de la prestación) o de forma prospectiva (sumando lo que se amortizaría en los períodos restantes y restando la prestación pendiente, que suele ser 0).

Método retrospectivo: Prestación Vencida - Contraprestación Vencida
Método prospectivo: Contraprestación pendiente - Prestación Pendiente

2.3.1 Método retrospectivo

Para el método de amortización constante es: $C_x = C_0 - (A_t * x)$

Para el sistema francés es: $C_x = C_0(1 + i_m)^x - (\alpha_t * S_{x\neg i_m})$

Como en esta situación el capital y las cuotas ya pagadas se están trasladando al momento x, trasladamos las cuotas al momento actual (nos movemos hacia la derecha en el eje de tiempo) mediante la operación $S_{n\neg i}$ que es:

$$S_{n\neg i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i_m}$$

2.3.2 Método prospectivo

Suele ser más sencillo de calcular.
Para el método de amortización constante es: $C_x = (t - x) * A_t$

Es decir:
$(t-x)$: total de periodos menos periodo en el que amortizamos (es decir, periodos restantes) multiplicado por:
A_t: capital que se amortiza en cada cuota

En el caso del sistema francés la fórmula es: $C_x = \alpha_t * a_{(t-x)\neg i_m}$

Y como en este caso, estamos trasladando los pagos futuros al instante actual x, tenemos que operar con $a_{n\neg i}$ (nos movemos hacia la izquierda en el eje de tiempo).

Ambos métodos se ven mucho más claramente en un ejemplo.

Ejemplo 2.3.1 y 2.3.2
El banco nos concede un préstamo de 10.000 € a un interés del 7% que devolveremos en 10 términos anuales. Calcular la parte de capital de las anualidades del método de amortización constante y la anualidad para el sistema francés y en ambos casos calcular la cantidad que salda la operación en el instante $t = 2$ por los métodos retrospectivo y prospectivo.

$C_0 = 10000$
$t = m * n = 1 * 10 = 10$ (la frecuencia es 1 por tratarse de pagos anuales)
$J_1 = 7\% = 0{,}07$ (por supuesto, en este caso $J_1 = i_1$)

1º) Anualidad

A. Constante: $A_t = \frac{C_0}{t} = 10000/10 = 1000$ €

S. Francés: $\alpha_t = \frac{C_0}{a_{(n*m)\neg i_m}} = 10000/7.02 = 1423{,}78$ €

2º) Cantidad que salda la operación en el instante $t = 2$

Método retrospectivo

A. Constante:

$$S_2 = 10000 - (2 * 1000)$$
$$S_2 = 10000 - 2000 = 8000 \text{ €}$$

S. Francés:

$$S_2 = 10000(1{,}07)^2 - 1423{,}78 * S_{2\neg 0{,}07}$$
$$S_2 = 8501{,}79 \text{ €}$$

Método prospectivo

A. Constante:

$$S_2 = (10-2) * 1000$$
$$S_2 = 8 * 1000 = 8000 \text{ €}$$

S. Francés:

$$S_2 = 1423{,}78 * a_{8\neg 0{,}07}$$
$$S_2 = 1423{,}78 * 5{,}971 = 8501{,}79 \text{ €}$$

Por supuesto, y como era de esperar, operemos por un método u otro el resultado ha de ser el mismo. En general, la prestación pendiente en el método prospectivo es 0 pues la prestación (en los problemas con los que trabajamos habitualmente) se entrega de forma íntegra en el instante $t = 0$.

Además, la ecuación de equivalencia financiera en $t = 2$ refleja este hecho de la siguiente forma.

- Método de amortización constante: $10000(1{,}07)^2 = 1700(1{,}07)^1 + 1630 + 8000$
- Sistema francés: $10000(1{,}07)^2 = 1423{,}78(1{,}07)^1 + 1423{,}78 + 8501{,}79$

2.4 Préstamos con interés variable

Puede darse el caso de que el interés no se mantenga constante a lo largo de la vida del préstamo, sino que se revise periódicamente. Para el cálculo de las cuotas, se hace siempre la hipótesis de que el interés será el que estipulemos actualmente para todo el resto de períodos.

Ejemplo 2.4.1
Supongamos un préstamo de 10.000 € a devolver en 3 años y sujeto a revisiones anuales de un tipo de interés, que en el primer año se acuerda como un 3 %, el segundo como un 4% y el tercer año como un 5%. Los pagos se realizan de forma mensual por el sistema francés.

Año 1

$C_0 = 10000$ €
$m * n = 12 * 3 = 36$ (periodos totales)
$J_{12} = 3\% = 0{,}03$
$i_{12} = 3/12 = 0{,}25\% = 0{,}0025$

Calculamos la mensualidad con el interés previsto para este año teniendo en cuenta que faltan 36 meses para el vencimiento del préstamo. Mensualidad:

$$\alpha_t = \frac{C_0}{a_{36\neg i_m}} = \frac{10000}{a_{36\neg 0{,}0025}} = \frac{10000}{34{,}386} = 290{,}81 \text{ €}$$

Al final del primer año, la cantidad que faltará por amortizar será:

$$C_{12} = \alpha_t * a_{(36-12)\neg 0{,}0025} = 290{,}81 * 23{,}27 = 6765{,}98 \text{ €}$$

NOTA: En $a_{(36-12)\neg 0{,}0025}$ a los 36 períodos del préstamo se le restan los 12 que habrán pasado al terminar el año. Lo mismo en años sucesivos.

Año 2

$C_{12} = 6765{,}98$ €
$36 - 12 = 24$ (periodos restantes)
$J_{12} = 4\% = 0{,}04$
$i_{12} = 4/12 = 0{,}33\% = 0{,}0033$

Este año, el valor de C_0 es sustituido por C_{12}, que es el capital pendiente de amortizar. Calculamos la nueva mensualidad con el interés previsto para el segundo año y teniendo en cuenta que ahora quedan 24 meses para el vencimiento del préstamo. Mensualidad:

$$\alpha_t = \frac{C_{12}}{a_{24\neg i_m}} = \frac{6765{,}98}{a_{24\neg 0{,}0033}} = \frac{6765{,}98}{23{,}03} = 293{,}81 \text{ €}$$

Al final del segundo año, la cantidad que faltará por amortizar será:

$$C_{24} = \alpha_t * a_{36-24\neg 0{,}0033} = 293{,}81 * 11{,}63 = 3416{,}76 \text{ €}$$

Año 3

$C_{24} = 3416{,}76$ €
$36 - 24 = 12$ (periodos restantes)
$J_{12} = 5\% = 0{,}05$
$i_{12} = 5/12 = 0{,}42\% = 0{,}0042$

Este año, el valor de C_{12} es sustituido por C_{24}, que es el capital pendiente de amortizar. Calculamos la nueva mensualidad con el interés previsto para el tercer año y teniendo en cuenta que ahora quedan 12 meses para el vencimiento del préstamo. Mensualidad:

$$\alpha_t = \frac{C_{24}}{a_{12\neg i_m}} = \frac{3416{,}76}{a_{12\neg 0{,}0042}} = \frac{3416{,}76}{11{,}68} = 292{,}50 \text{ €}$$

Al final del tercer año, la cantidad que faltará por amortizar tendrá que ser 0 €:

$$C_{36} = \alpha_t * a_{36-36\neg 0{,}0042} = 292{,}50 * 0 = 0 \text{ €}$$

2.5 Otros gastos asociados a préstamos

Pueden aplicarse:
Comisión de apertura: % sobre C_0
Comisión de cancelación anticipada: % sobre C_t siendo t el instante de cancelación
Comisión de amortización anticipada: % sobre la cantidad amortizada

Estas tres comisiones (así como comisiones finales, gastos de estudio, gastos periódicos...) suponen gastos que el interés nominal anual, el interés m-ésimo o el interés anual equivalente no reflejan. Si añadimos todas las comisiones y cobros que realiza un banco por un préstamo a la ecuación de equivalencia financiera (en su instante correspondiente), y despejamos el interés (mediante Newton-Raphson, algoritmo que no es necesario estudiar), obtenemos el TAE.

Si además añadimos gastos notariales, de tasación, y en definitiva cualquier gasto a mayores realizado con relación a la operación, el interés que obtenemos es el interés real al que el prestatario está recibiendo un préstamo.

2.6 Amortización anticipada

Puede suceder que en un determinado instante, un prestatario quiera amortizar más capital que el que la cuota exige sin llegar al total del saldo pendiente en ese período que liquidaría la operación. Esto puede desembocar en dos situaciones: reducir el importe de las cuotas en el resto de plazos o, por el contrario, mantener el importe de las cuotas y reducir el numero de plazos restante.
Nosotros solo estudiaremos el primer caso, en el cual la cuota tendrá que ser recalculada.

Ejemplo 2.6.1
Sea un préstamo de 20.000 € que se van a amortizar con una renta anual constante inmediata y post-pagable de 15 términos al 10% de interés. Calcular la anualidad, el capital pendiente de amortizar a los tres años tras pagar esa anualidad y por ultimo, suponiendo una amortización anticipada de 3000 € en ese año, hallar el importe total a pagar en ese momento y la nueva anualidad.

$C_0 = 20000$ €
$m * n = 1 * 15 = 15$ (periodos totales)
$J_1 = i_1 = 10\% = 0{,}10$
$A.A.$ en $(t = 3) = 3000$ €

1º) Anualidad

$$\alpha_t = \frac{C_0}{a_{n\neg i}} = \frac{20000}{a_{15\neg 0{,}10}} = \frac{20000}{7{,}61} = 2631{,}58 \text{ €}$$

2º) Capital pendiente en el instante $t = 3$

$$C_3 = \alpha_t * a_{n\neg i} = 2631{,}58 * a_{15-3\neg 0{,}10} = 17930{,}53 \text{ €}$$

3º) Importe a pagar incluyendo la amortización anticipada en $t = 3$

$$A.A. = 3000 \text{ €}$$
$$\text{Total} = \alpha_t + A.A. = 2631{,}58 + 3000 = 5631{,}58 \text{ €}$$

Y por ultimo, la nueva anualidad es:

$$\alpha_t = \frac{C_3 - A.A.}{a_{(15-3)\neg i}} = \frac{(17930{,}53 - 3000)}{a_{12\neg 0{,}10}} = \frac{14930{,}53}{a_{12\neg 0{,}10}} = \frac{14930{,}53}{6{,}81} = 2192{,}44 \text{ €}$$

Ejemplo 2.6.2
Sea un préstamo de 10.000 € a devolver en los siguientes 4 años mensualmente mediante sistema francés a un 12 % de interés nominal anual. La operación está sujeta a otros gastos: 100 € de gastos de estudio, 200 € notariales y 50 € de tasación. La comisión por cancelación anticipada es del 3%. Calcular la cuota, plantear la ecuación de equivalencia financiera del coste real para el prestatario si se cancela anticipadamente el préstamo en un año y, por ultimo, plantear la ecuación financiera que proporciona la rentabilidad real para el prestamista.

$C_0 = 10000$ €
$m * n = 12 * 4 = 48$ (periodos totales)
$J_{12} = 12\%$
$i_{12} = \frac{J_{12}}{m} = \frac{12}{12} = 1\% = 0{,}01$
G. de estudio = 100 €
Notario = 200 €
Tasación = 50 €
C. de cancelación = $3\% = 0{,}03$

1º) Cuota: $\alpha_t = \frac{C_0}{a_{(m*n)\neg i_m}} = \frac{10000}{a_{48\neg 0{,}01}} = \frac{10000}{37{,}974} = 263{,}34$ €

2º) Ecuación de equivalencia financiera con cancelación en 1 año:

Gastos = $100 + 200 + 50 = 350$ €

Saldo pendiente en $C_{12} = \alpha_t * a_{(48-12)\neg 0{,}01} = 263{,}34 * a_{36\neg 0{,}01} = 7928{,}46$ €

Sumamos la comisión de cancelación: $C_{12} = 7928{,}46 * (1{,}03) = 8166{,}32$

Finalmente:

$$10000 = 350 + 263{,}34(1 + r_{12})^{-1} + 263{,}34(1 + r_{12})^{-2} + ...$$
$$... + 263{,}34(1 + r_{12})^{-12} + 8166{,}32(1 + r_{12})^{-12}$$

Siendo r_{12} el interés real de toda la operación para el prestatario

3º) Ecuación de equivalencia financiera para el prestamista:

$$10000 = 100 + 263{,}34(1 + r_{12})^{-1} + 263{,}34(1 + r_{12})^{-2} + ...$$
$$... + 263{,}34(1 + r_{12})^{-12} + 8166{,}32(1 + r_{12})^{-12}$$

Siendo r_{12} el interés al que ha realizado la operación por su parte. Es diferente del interés que ha de pagar el prestatario porque el prestamista no percibe los gastos notariales ni de tasación. En ambos casos se despejaría utilizando el algoritmo de Newton-Raphson.

2.7 Carencia de capital y carencia total

En una situación de carencia de capital por un numero n de períodos, solo se pagan intereses durante los mismos. Al no amortizarse el principal, el saldo pendiente permanece invariable

y estos intereses serán todos de la misma cuantía hasta que comience la amortización de capital.
En una situación de carencia total, los intereses no son pagados sino que se acumulan al saldo pendiente, por lo que se acrecientan progresivamente y cuando comience la amortización, habrá que devolver el principal más esas cantidades.

Ejemplo 2.7.1
Imaginemos un préstamos con carencia de capital y con carencia total
C_0 = 1000 €
Los intereses (pagos anuales) son $J_1 = 5\%$

Carencia de capital: Cada año de carencia se pagan tan solo los intereses. El saldo pendiente durante toda la carencia sigue siendo el principal.
$I_1 = 0{,}05 * 1000 = 50$ €
$I_2 = 0{,}05 * 1000 = 50$ €
...
$I_n = 0{,}05 * 1000 = 50$ €

Carencia total: Los intereses se acumulan al principal. En el periodo n (y en general en cualquiera de los períodos de carencia) se puede calcular el saldo pendiente usando la ley compuesta.
$I_1 = 0{,}05 * 1000 = 50$ €
$I_2 = 0{,}05 * 1050 = 52{,}5$ €
...
$I_n = 0{,}05 * C_{n-1} = ...$ o también $C_n = 1000 * (1 + i)^n$

3. OBLIGACIONES

Las obligaciones son partes alícuotas (iguales) de un préstamo que solicita una empresa y que supone una financiación ajena a largo plazo (al total le llamamos empréstito). La empresa es el emisor de las obligaciones y los compradores son los obligacionistas.
Estos obligacionistas tienen derecho a percibir los intereses pactados (llamados cupones) y a que se les devuelva el dinero en las condiciones establecidas.

3.1 Características de las emisiones

Se deben conocer:

1. El importe total de dicha emisión. Se puede calcular multiplicando el número de títulos emitido por el precio de cada uno de ellos.

2. El precio de emisión en el período de emisión, que puede ser a su vez:
a) A la par: El precio se corresponde con el valor nominal
b) Bajo la par: (o con prima de emisión): Más barato que el valor nominal
c) Sobre la par: Más caro que el valor nominal (es la situación menos habitual).

3. Interés que la empresa paga al obligacionista, generalmente expresado de forma anual. ¡ATENCION! EL TIPO DE INTERÉS SIEMPRE SE APLICA SOBRE VALOR NOMINAL DE CADA TÍTULO.

4. El período de amortización. Es el momento en el que la empresa se compromete a devolver el dinero al obligacionista.

5. Precio de amortización. Es el dinero que se devuelve, que a su vez puede ser

a) A la par: la cantidad coincide con el valor nominal
b) Sobre la par: (o con prima de amortización/reembolso): más del valor nominal.
No es frecuente encontrarse situaciones «Bajo la par».

3.2 Clasificación de las emisiones

Según el emisor:

1. Deuda pública
2. Deuda privada

Según la modalidad de amortización:

1. Vencimientos periódicos parciales
2. Única amortización al vencimiento

Según el pago de intereses:

1. Pago de intereses periódicos (obligación americana)
2. Pago de intereses en el vencimiento (cupón cero)

Según la duración del empréstito:

1. Pagarés: vencimiento inferior a 18 meses
2. Bonos: vencimiento entre 2 y 5 años
3. Obligaciones: vencimiento superior a 5 años

3.3 Estrategias de amortización

De las posibles estrategias que existen para amortizar la emisión de obligaciones, nos fijaremos en aquellas que amortizan el valor nominal en un pago único al vencimiento. Dentro de estas diferenciamos las obligaciones americanas y las obligaciones cupón cero. También veremos como no siempre la empresa emisora liquida siempre a todos los compradores (obligacionistas) al final de la operación, pues en algunas un porcentaje de estos reciben su contraprestación de forma anticipada (mediante sorteo).

3.3.1 Obligaciones americanas

En los períodos intermedios devuelven un beneficio, denominado «cupón». En el último período se devuelve además el valor nominal y las primas de reembolso que pudiera haber.

Ejemplo 3.3.1
Se emiten 1.000.000 de obligaciones americanas con un valor nominal de 500 € a un tipo de interés anual del 6%. La emisión se realiza bajo la par al 85% y existe una prima de amortización de un 1%. La operación dura 4 años.

nº de obligaciones = 1.000.000
TI J_1 = 6 %
Emisión al 85 %
Prima amortización = 1 %
n = 4 años

Podemos calcular los siguientes datos. En primer lugar están los que afectan a una sola obligación, y a continuación los que reflejan la operación para la empresa. Al final, se incluye la ecuación de equivalencia financiera con el coste real para un obligacionista con un título y la ecuación de equivalencia financiera con el coste real para la empresa.

Precio de una obligación (lo pagado realmente por una obligación) =
VN * Emisión = $500 * 0{,}85 = 425$ €

Cupón de una obligación (lo percibido en cada período) =
VN * TI = $500 * 0{,}06 = 30$ € / período

Prima de reembolso de una obligación (lo recibido a mayores en el vencimiento) =
VN * Prima = $500 * 0{,}01 = 5$ €

Total del empréstito (el total recaudado por la empresa en la operación) =
Nº de títulos * Precio = $1.000.000 * 425 = 425.000.000$ €

Total que la empresa paga por cupones en cada período =
Nº de títulos * Cupón = $1.000.000 * 30 = 30.000.000$ €/periodo

Total que la empresa paga por primas al vencimiento =
Nº de títulos * Prima individual = $1.000.000 * 5 = 5.000.000$ €

Coste real para un obligacionista con un título:
Precio = cupones de cuatro perídos + VN en el ultimo periodo + Prima en el ultimo periodo
$$425 = 30 * a_{4\neg i} + 500(1+i)^{-4} + 5 * (1+i)^{-4}$$

Coste real para la empresa (escrito de forma análoga):
$$425.000.000 = 30.000.000 * a_{4\neg i} + 500.000.000(1+i)^{-4} + 5.000.000 * (1+i)^{-4}$$

Como se han emitido un millón de títulos, la ecuación ha de ser la misma pero con millones en lugar de unidades. Si existen gastos de emisión que paga la empresa para tener derecho a emitir obligaciones, éstos solo se reflejan en la ecuación del coste real para la empresa y en el momento apropiado (generalmente, al inicio). Supongamos que en esta operación, los gastos de emisión fueron del 15.000 € en el momento inicial. La ecuación sería:
$$425.000.000 = 15.000 + 30.000.000 * a_{4\neg i} + 500.000.000(1+i)^{-4} + 5.000.000 * (1+i)^{-4}$$

En todos estos casos el coste real (el interés i) ha de ser despejado por el algoritmo de Newton-Raphson.

3.3.2 Obligaciones cupón cero
En este caso, no se pagan cupones en los períodos intermedios, sino que son acumulados al principal (de forma similar a como se acumulan en la carencia total de un préstamo durante un tiempo). El total de capital y cupones se calcula por lo tanto mediante ley compuesta.

Ejemplo 3.3.2
Emisión de obligaciones cupón cero de valor nominal 100 € bajo la par al 90 % con un interés nominal anual del 10 % capitalizable semestralmente durante 5 años.

$\mathrm{VN} = 100$ €
$J_2 = 10\%$ y por lo tanto $i_2 = 5\%$
Emisión al 90%
$n = 5$ años y por lo tanto $m * n = 10$ períodos

Precio de un título = VN * Emisión = $100 * 0{,}9 = 90$ €
Capital y cupones en el periodo 10 = $C_{10} = C_1 * (1 + i)^n = 100 * (1{,}05)^{10} = 162{,}89$ €

Podemos expresar la operación entera y despejar el interés real. Para eso, hemos de establecer la equivalencia financiera al final. También podemos expresar el interés directamente de forma anual (exponente en años):

$90 * (1 + i)^5 = 162{,}89$ €

Despejamos el interés y obtenemos:

$$(1 + i)^5 = \frac{162{,}89}{90}$$

$$(1 + i)^5 = 1{,}809$$

$$i = \sqrt[5]{1{,}809} - 1$$

y finalmente $i = 0{,}12598$ ó lo que es lo mismo $i = 12{,}598\%$

3.3.3 Obligaciones amortizables por sorteo
La emisión de obligaciones puede ser amortizada también por sorteo, esto significa liquidar la operación con una porción de los obligacionistas en un período (hecho que se puede repetir), y con el resto al final.

Ejemplo 3.3.3
Se emiten 1000 obligaciones cupón cero con valor nominal de 1000 € al 97%. Las obligaciones se amortizarán por sorteo, el 20% a los 2 años con una prima del 3%, el 30% a los 3 años con una prima del 2% y el resto a los 4 años con una prima de un 1%. El tipo de interés es del 9,5% nominal anual. Calcular el coste de la emisión y la rentabilidad del obligacionista a cada momento.

VN = 1000 €
Emisión al 97%
n = 4 años
i = 0,095

Comenzamos por calcular el precio de una obligación:
VN * Emisión = 1000 * 0,97 = 970 €

Con este dato podemos calcular el total del empréstito:
Precio * nº de títulos = 970 * 1000 = 970.000 €

Los obligacionistas cuya obligación sea liquidada a los 2 años obtendrán:
$C_2 = 1000 * (1{,}095)^2 = 1199{,}03$ €
Prima = VN * 3% = 1000 * 0,03 = 30 €
Total = 1129,03 €

Los obligacionistas cuya obligación sea liquidada a los 3 años obtendrán:
$C_3 = 1000 * (1{,}095)^3 = 1312{,}93$ €
Prima = VN * 2% = 1000 * 0,02 = 20 €
Total = 1332,93 €

Los obligacionistas cuya obligación sea liquidada a los 4 años obtendrán:
$C_4 = 1000 * (1{,}095)^4 = 1437{,}66$ €
Prima = VN * 1% = 1000 * 0,01 = 10 €
Total = 1447,66 €

Por lo tanto el coste de la emisión se puede reflejar de la siguiente forma:

$$970.000(1+i)^4 = 200 * [1229{,}03 * (1+i)^2] + 300 * [1332{,}93 * (1+i)^3] + 500 * (1447{,}66)$$

Siendo 200, 300 y 500 el numero de obligaciones que son amortizadas con las respectivas cantidades en cada período.

Rentabilidad para un obligacionista en t = 2

$$970(1+i)^2 = 1229{,}03 \qquad i = 12{,}56\%$$

Rentabilidad para un obligacionista en t = 3

$$970(1+i)^3 = 1332{,}93 \qquad i = 11{,}18\%$$

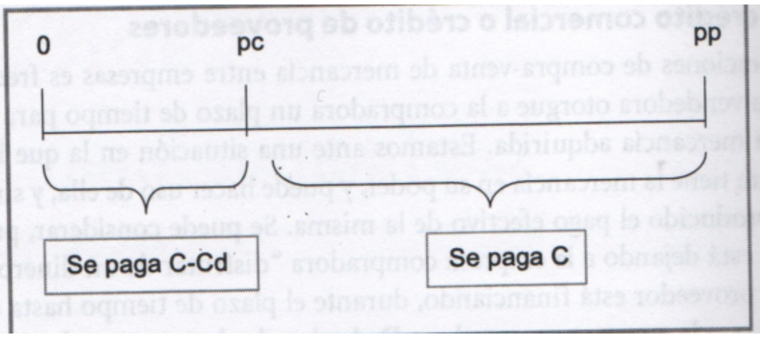
Rentabilidad para un obligacionista en t = 4

$$970(1+i)^4 = 1447{,}66 \qquad i = 10{,}53\%$$

4. FUENTES DE FINANCIACIÓN A CORTO PLAZO

4.1 Crédito comercial o de proveedores

El cliente disfruta del producto en t = 0 y paga en un momento posterior. Dispone de un total de días (Plazo de pago o de crédito; *PP*) para pagar, pero en los primeros puede disfrutar de un descuento (Plazo de contado, *PC*). Llamaremos *C* al importe nominal del producto y *C* - *dC* al importe efectivo (con descuento).



Las condiciones se escriben de la siguiente manera:

d/PC neto PP

Por ejemplo, 2/10 neto 40 significa que disfrutaremos de un 2 % de descuento en los primeros 10 días y que sino, disponemos de hasta 40 para pagar el neto.

El coste real del crédito comercial viene dado por:

$$r_{\text{cc}} = \frac{1}{1-d}^{\frac{365}{\text{pp}-\text{pc}}} - 1$$

Este coste queda expresado como un tipo de interés anual, que podremos comparar con el coste de otras fuentes de financiación (una póliza de crédito, un préstamo bancario, etc.).

Ejemplo 4.1.1

Acabamos de adquirir un equipo en condiciones 2/10 neto 40. Nuestra empresa dispone de una póliza de crédito con un coste anual efectivo de un 13 %. ¿Cuando se debe abonar la factura al proveedor?

$$r_{\text{cc}} = \frac{1}{1-d}^{\frac{365}{\text{pp}-\text{pc}}} - 1 = \frac{1}{0{,}98}^{\frac{365}{30}} - 1 = 0{,}27864$$

La mejor opción para abonar la factura será en el plazo de contado (PC), es decir, a los 10 días de la compra; porque de esperar y agotar el plazo de pago (PP), el coste se eleva un 27,86%.

Ejemplo 4.1.2

En los últimos años, nuestra empresa siempre ha agotado el plazo de pago (PP) para pagar a los proveedores con unas condiciones 4/20 neto 90. Recientemente, se cambia el plazo de contado (PC) a 5 días: 4/5 neto 90.

a) Si seguimos pagando el día 90, ¿nos perjudican las nuevas condiciones?

$$r_{\text{cc}} = \frac{1}{1-d}^{\frac{365}{\text{pp}-\text{pc}}} - 1 = \frac{1}{0{,}96}^{\frac{365}{70}} - 1 = 0{,}2372$$

$$r_{\text{cc}} = \frac{1}{1-d}^{\frac{365}{\text{pp}-\text{pc}}} - 1 = \frac{1}{0{,}96}^{\frac{365}{85}} - 1 = 0{,}1916$$

Nos benefician, porque se reduce el coste de agotar el plazo de pago.

b) ¿Y si pagamos en el plazo de contado? Nos perjudica porque el plazo es más reducido

4.2 Letras de cambio

Se diferencian del crédito comercial en que tienen una validez legal y un banco actúa como intermediario.
El proveedor (vendedor) se denomina «librador»
El comprador se denomina «librado»
El banco se denomina «tomador».
El librado se compromete a pagar, dentro de un plazo de tiempo, al librador. Si el librador necesita ese dinero de forma anticipada, el banco se lo adelanta (mediante descuento comercial y descontando también comisiones y gastos). Si el librado no puede pagarle ahora al banco, el banco cobrará ese dinero al librador.

En el caso de que el librador necesite de forma anticipada el valor de la letra, recibirá un valor líquido que se corresponde con el valor nominal menos el descuento y las comisiones aplicadas por el banco. Las comisiones pueden ser:
- Comisión de domiciliación: si la letra no está domiciliada; es decir, si en el documento no figuran los datos del librado (y esta comisión se cobra al librador)
- Comisión de aceptación: si la letra no está aún aceptada; es decir, si en el documento no figura aún la firma del librado (y esta comisión se cobra al librador)

El valor líquido se calcula de la siguiente forma:

$$\mathrm{VL} = \mathrm{VN} - D_c - \mathrm{Com}$$

O también:

$$\mathrm{VL} = \mathrm{VN} - \mathrm{VN} * i * \frac{n}{360} - \mathrm{Com}$$

Siendo *n* el <u>numero de días que la letra ha sido adelantada</u> (¡no el día del adelanto!) y *Com* el dinero descontado correspondiente a las comisiones cobradas.
Cabe destacar que el numero de días del año comercial se considera 360.
El coste real de adelantar una letra de cambio se calcula:

Coste real = $r_{\mathrm{dc}} = (\frac{\mathrm{VN}}{\mathrm{VL}})^{\frac{365}{n}} - 1$

Siendo n el numero de días. Como el coste es real, el numero de días también lo ha de ser, y se escribe 365 en el exponente.

Ejemplo 4.2.1
Se extiende una letra con las siguientes condiciones:
VN = 500 €
TI = 6 %
C. domiciliación = 3%
C. aceptación = 1%
Existe un mínimo de 6 € para ambas comisiones. El librador solicita el adelanto de 38 días de la letra, que aún no ha sido domiciliada ni aceptada. ¿Cuanto dinero recibe? ¿Cual es el coste del adelanto de la letra?

$D_c = \mathrm{VN} * i * \frac{n}{360}$
$D_c = 500 * 0{,}06 * \frac{38}{360} = 3{,}16$ €

C. domiciliación = $500 * 0{,}03 = 15$ €
C. aceptación = $500 * 0{,}01 = 5$ € (y se cobrarán 6€ por ser éste el mínimo)

Por lo tanto:

$$\mathrm{VL} = \mathrm{VN} - D_c - \mathrm{Com}$$
$$\mathrm{VL} = 500 - 3{,}16 - (15 + 6) = 500 - 24{,}16 = 475{,}84 \text{ €}$$

El librador cobrará 475,84 €

El coste de este adelanto es de:

$$r_{\mathrm{dc}} = (\frac{500}{475{,}84})^{\frac{365}{38}} - 1 = 0{,}6092$$

Por lo tanto el coste es del 60,92 %

4.3 Póliza de crédito

Las pólizas de crédito ponen a disposición del empresario una cantidad de dinero con la que puede financiarse y que se liquida trimestre tras trimestre, de forma similar a como funciona una tarjeta de crédito: podemos emplear hasta el límite de crédito disponible y después se liquidan los intereses y comisiones.

De las pólizas necesitamos 3 datos:

- Límite de crédito: el máximo del que podemos disponer
- TI anual: el tipo (que habrá que convertir en trimestral) al que pagamos los intereses a la entidad que nos proporciona la póliza.
- Comisiones: hay dos,
  a) de apertura: aplicada sobre el límite de crédito al contratar la póliza
  b) de disponibilidad: se aplica sobre el saldo medio no dispuesto (dinero no empleado) por estar «reservado» para uso del empresario.

Del dinero que cubre la póliza, se pueden distinguir dos grandes grupos:

- SMD: Saldo medio disponible, es la cantidad media (en un trimestre o en varios) que hemos utilizado.
- SMND: Saldo medio no dispuesto, es la cantidad media (en un trimestre o en varios) que no hemos utilizado.

Por lo tanto es evidente que: LC = SMD + SMND

4.3.1 Cálculos de una póliza

El saldo medio disponible es una media ponderada de cuántos días permanece cada saldo en la póliza durante los 90 días del trimestre:

$$\mathrm{SMD} = \frac{(\mathrm{Saldo}_1 * n_1) + (\mathrm{Saldo}_2 * n_2) + ... + (\mathrm{Saldo}_i * n_i)}{90}$$

Siendo Saldo_i la cantidad y n_i la cantidad de días desde que ese saldo aparece hasta que su valor cambia. Por eso cabe destacar que n_1, n_2, ..., n_1 no tienen porque ser iguales. También es evidente que SMND = LC - SMD.

El <u>interés</u> que se nos ha de cobrar se calcula $I = \mathrm{SMD} * i$
De existir varios períodos con SMD diferente, se calculan por separado y luego se suman para hallar los intereses totales, por ejemplo:
$I_1 = \mathrm{SMD}_1 * i$
$I_2 = \mathrm{SMD}_2 * i$
...
$I_n = \mathrm{SMD}_n * i$ y por último... $I_T = I_1 + I_2 + ... + I_n$

La <u>comisión de apertura</u> de una póliza se calcula sobre el límite de crédito:
$\mathrm{Com.Aper.} = \mathrm{LC} * C\mathrm{.ap}$ €

La <u>comisión de disponibilidad</u> se calcula sobre el saldo medio no dispuesto:
$\mathrm{Com.Disp.} = \mathrm{LC} * C\mathrm{.ap}$ €

El <u>coste real</u> de una póliza se calcula poniendo los gastos generados en relación con el dinero disfrutado de ella.

En primer lugar, el coste para un solo trimestre se expresa:

$$\mathrm{Coste} = \frac{\mathrm{Com.Aper} + I + \mathrm{Com.Disp}}{\mathrm{SMD}}$$

Es decir, se ponen en relación los gastos que ha supuesto contratar una póliza durante un mes con el dinero disfrutado.

Si queremos ver varios trimestres, los escribimos de igual manera, pero en el denominador, tenemos que reflejar la media de los SMDs de esos trimestres:

$$\mathrm{Coste} = \frac{\mathrm{Com.Aper} + (I_1 + \mathrm{Com.Disp}_1) + (I_2 + \mathrm{Com.Disp}_2) + ... + (I_i + \mathrm{Com.Disp}_i)}{\mathrm{mediaSMD}}$$

Siendo:
$I_i =$ Los intereses a pagar correspondientes al trimestre i
$\mathrm{Com.Disp}_i =$ La comisión de disponibilidad a pagar correspondiente al trimestre i
$\mathrm{mediaSMD} =$ La media de los diferentes SMDs que pudiese haber.

Además puede darse el caso de que los gastos sean los mismos durante varios trimestres, con lo cual, podemos agrupar el paréntesis de cada uno $(I_i + \mathrm{Com.Disp}_i)$ simplemente multiplicándolo por el número de veces que se repite. En el siguiente ejemplo podemos ver cómo los primeros gastos se repiten durante los tres primeros trimestres:

$$\mathrm{Coste} = \frac{\mathrm{Com.Aper} + (I + \mathrm{Com.Disp}) * 3 + (I_4 + \mathrm{Com.Disp}_4) + ... + (I_i + \mathrm{Com.Disp}_i)}{\mathrm{mediaSMD}}$$

Por último, puede que no nos den todos los datos de los 4 trimestres, pero que nos pidan el coste anual de una póliza. En ese caso hacemos la suposición de que serán los mismos durante todo el año. Por lo tanto, podemos utilizar la formula del coste de esta forma:

$$\mathrm{Coste} = \frac{\mathrm{Com.Aper} + (I + \mathrm{Com.Disp}) * 4}{\mathrm{SMD}}$$

Atención, la media de los cuatro SMDs siendo estos iguales, es el propio valor de SMD.

Ejemplo 4.3.1
Contratamos una póliza con las siguientes condiciones:

Límite = 50.000 €
TI = 4 %
Comisión de apertura = 2%
Comisión de disponibilidad = 0,5 %

Estudiar el coste del primer trimestre si utilizamos:

Un 25% en el día 15
15.000 € en el día 62

En primer lugar, hayamos el SMD:

$25\% * 50.000 = 12.500$ €

$$\text{SMD} = \frac{(50.000 * 15) + (50.000 - 12.500)(62 - 15) + (37.500 - 15.000)(90 - 62)}{90}$$

$$= \frac{750.000 + 1.762.500 + 630.000}{90} = \frac{3142500}{90} = 34.916{,}67 \text{ €}$$

Y por lo tanto SMND = 50.000 - 34.916,67 = 15083,33 €
Comisión de apertura = 50.000 * 0,02 = 1000 €
Comisión de disponibilidad = 15083,33 * 0,005 = 75,42 €
Interés = 34.916,67 * 0,01 = 349,16 €

Ahora con todos los datos, podemos hacer los cálculos del coste. Comencemos por el coste del primer trimestre:

$$\text{Coste}_{\text{1trimestre}} = \frac{1000 + (349{,}16 + 75{,}42)}{34916{,}67} = 0{,}0408$$

Y por lo tanto el coste real de esta póliza durante el primer trimestre es del 4,08 %

El coste anual será:

$$\text{Coste}_{\text{anual}} \frac{1000 + (349{,}16 + 75{,}42) * 4}{34916{,}67} = 0{,}1632$$

Un 16,32 % anual.

ANEXO
¿Qué debo saber cómo mínimo?

1. MATEMÁTICA FINANCIERA

Sirven para capitalizar (llevar una cantidad a un momento posterior con un interés conocido):

Ley simple: $C_n = C_0(1 + ni)$

Ley compuesta: $C_n = C_0(1 + i)^n$

Sirve para refleja una operación:

Ley financiera: $C_0 = \alpha_1(1 + i)^{-1} + \alpha_2(1 + i)^{-2} + ... + \alpha_n(1 + i)^{-n}$

Sirve para resumir la suma de $\alpha_t(1 + i)^{-t}$ en varios períodos consecutivos (los pagos pendientes vistos en el momento actual, va de derecha a izquierda en el eje de tiempo):

$$a_{n\neg i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Sirve para resumir la suma de $\alpha_t(1 + i)^t$ en varios períodos consecutivos (los pagos realizados vistos en el momento actual, va de izquierda a derecha en el eje de tiempo):

$$S_{n\neg i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i_m}$$

Sirve para pasar del TI nominal anual al TI m-ésimo: $i_m = \frac{J_m}{m}$

2. PRÉSTAMOS

2.1 Amortización constante: $\mathrm{A}_t = \frac{C_0}{n}$

2.2 Sistema francés: $\alpha_t = \frac{C_0}{a_{n\neg i}}$

En ambos sistemas se cumple: $\alpha_t = A_t + I_t$ y $I_t = i * C_{t-1}$

Sirven para calcular saldos pendientes
- Método retrospectivo: Prestación - Contraprestaciones vencidas
- Método prospectivo: Contraprestaciones pendientes

Por lo tanto:
- En amortización constante:
  - MR: $C_t = C_0 - (A_t * t)$
  - MP: $C_t = A_t * (n - t)$
- En sistema francés:
  - MR: $C_t = C_0 * (1 + i)^t - \alpha * S_{t\neg i}$
  - MP: $C_t = \alpha * a_{(n-t)\neg i}$

2.3 Cancelación anticipada:

a) Calculo la cuota del préstamo con normalidad

b) Para hacer la cancelación en t:

- Calculo saldo pendiente en t (preferiblemente por prospectivo)
- Calculo la comisión de cancelación

2.6 Amortización anticipada:

a) Calculo la cuota del préstamo con normalidad

b) Para hacer la amortización en t:

- Calculo saldo pendiente en t (preferiblemente por prospectivo)
- Calculo la comisión de amortización
- Resto $C_t - \text{amortizado}$
- Con el nuevo saldo pendiente, recalculo la cuota con normalidad.

2.4 Otros gastos en préstamos

-Para la TAE: Dinero que recibe el banco:

- Estudio
- Com. Apertura: calculada sobre C_0
- Com. Cancelación: calculada sobre C_t
- Com. Amortización anticipada: calculada sobre la cantidad amortizada
- Gastos periódicos: es una cantidad a sumar al final en todas las cuotas.
- Otros gastos, por ejemplo comisiones finales (menos habituales).

- Para el coste real: Los datos de la TAE y

- Gastos de notario: que son percibidos por el notario
- Gastos de tasación: que son percibidos por el tasador
- Otros gastos ajenos al banco

2.5 Préstamos con TI variable

a) Calculo la cuota del préstamo con normalidad con el primer TI

b) Calculo en saldo pendiente antes del cambio de TI

c) Recalculo la cuota del préstamo con normalidad para el nuevo TI

2.7 Carencias

- Carencia de capital: solo se pagan los intereses:

a) Calculo $I_1 = C_0 * i_m$

b) Ese interés se paga durante todos los períodos de carencia (y no varia)

c) Calculo en préstamo con normalidad pero a los períodos n debo descontarle los períodos en los que hubo carencia.

- Carencia total: los intereses se acumulan al principal:

a) Capitalizo C_0 mediante ley compuesta para los períodos de carencia:

$C_t = C_0 * (1+i)^t$ siendo t los períodos con carencia.

b) Calculo en préstamo con normalidad para el nuevo C_t y los períodos n-t.

3. OBLIGACIONES:

Conocemos los siguientes datos:

- Valor de un título (VN)
- Nº de titulos emitidos
- Emisión al tanto %

- TI nominal anual (%)
- Prima de amortización/reembolso (%)
- Períodos que dura la operación (n)

Cálculos generales:

1. Precio = $\mathrm{VN} * \mathrm{emision}$
2. Prima de amortización = $\mathrm{VN} * \mathrm{prima}$
3. Cupón:
   a) en obligaciones americanas, Cupón = $\mathrm{VN} * i_m$ (para cada período)
   b) en obligaciones cupón cero hago $\mathrm{VN} + \mathrm{Cupon} = \mathrm{VN}(1+i)^n$
4. Escribir la ecuación: En el caso de cupón cero, la ecuación se escribe en t=n y se puede despejar i_{real} mediante operaciones simples.

Si queremos ver la ecuación desde el punto de vista de la empresa emisora de obligaciones, el total del empréstito es:

$$\mathrm{Emprestito} = \mathrm{Precio} * \mathrm{num.titulos}$$

Y todos los datos han de multiplicarse por el numero de títulos también.

En el caso de obligaciones amortizadas por sorteo, hacerlas como ejercicios independientes.

4. FUENTES DE FINANCIACIÓN A CORTO PLAZO

4.1 Crédito comercial (de proveedores):

Los datos son, por ejemplo: 4/20 neto 90 donde:

4: TI (%) que se nos descuenta (d)
20: nº de días del que disponemos para disfrutar de este descuento (PC)
neto 90: máximo de días disponibles (PP) para pagar el valor neto del producto.

El coste se calcula: $r_{\mathrm{cc}} = \frac{1}{1-d}^{\frac{365}{\mathrm{pp}-\mathrm{pc}}} - 1$

4.2 Letras de cambio:

$$\mathrm{VL} = \mathrm{VN} - \mathrm{VN} * i * \frac{n}{360} - \mathrm{Com}$$

$$\text{Coste real} = r_{\mathrm{dc}} = \left(\frac{\mathrm{VN}}{\mathrm{VL}}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

4.3 Pólizas de crédito:

a) Calcular SMD y SMND
b) Calcular la comisión de apertura, el interés y la comisión de disponibilidad
c) Calcular el coste:

Para un solo trimestre:

$$\mathrm{Coste} = \frac{\mathrm{Com.Aper} + I + \mathrm{Com.Disp}}{\mathrm{SMD}}$$

Para varios trimestres:

$$\text{Coste} = \frac{\text{Com.Aper} + (I_1 + \text{Com.Disp}_1) + ... + (I_i + \text{Com.Disp}_i)}{\text{mediaSMD}}$$

Para un coste anual:

$$\text{Coste} = \frac{\text{Com.Aper} + (I + \text{Com.Disp}) * 4}{\text{SMD}}$$